Correction du DM n°2

Exercice 1

1. (a) Déterminons le rang de C :

$$C \xleftrightarrow[]{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1\\ L_3\leftarrow L_3-L_1\\ L_4\leftarrow L_4-L_1\\ L_5\leftarrow L_5-L_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xleftrightarrow[]{\substack{L_3\leftarrow L_3-L_2\\ L_4\leftarrow L_4-L_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice obtenue est une matrice échelonnée de rang 2 donc $\mathrm{rg}(f) = 2$.

D'après la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ on a $f(e_1) = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5$ et $f(e_2) = e_1 + e_5$.

Ainsi, $e_2 + e_3 + e_4 = f(e_1 - e_2)$ donc $e_2 + e_3 + e_4 \in \mathrm{Im}(f)$ et $e_1 + e_5 = f(e_2)$ donc $e_1 + e_5 \in \mathrm{Im}(f)$.

Montrons que la famille $(e_2 + e_3 + e_4, e_1 + e_5)$ est libre. Soient λ et μ deux réels tels que

$$\lambda \cdot (e_2 + e_3 + e_4) + \mu \cdot (e_1 + e_5) = 0$$

Alors

$$\mu \cdot e_1 + \lambda \cdot e_2 + \lambda \cdot e_3 + \lambda \cdot e_4 + \mu \cdot e_5 = 0$$

donc $\lambda = \mu = 0$ car la famille $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ est libre. Ainsi, $(e_2 + e_3 + e_4, e_1 + e_5)$ est une famille libre de $\mathrm{Im}(f)$. Or $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension 2, c'est donc une base de $\mathrm{Im}(f)$.

(b) D'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f) = \dim(\mathbb{R}^5) = 5$. On en déduit que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 3$.

Soit $u = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ un vecteur de $\mathbb{R}^5$.

$$u \in \mathrm{Ker}(f) \iff C \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ -x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0 \end{cases} \quad \text{d'après les opérati}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = -x_2 - x_3 - x_4 - x_5 \\ x_2 = -x_3 - x_4 - x_5 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -x_3 - x_4 - x_5 \end{cases}$$

$$\iff \exists (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5, u = (0, -x_3 - x_4 - x_5, x_3, x_4, x_5)$$

$$\iff u \in \mathrm{Vect}\left((0, -1, 1, 0, 0), (0, -1, 0, 1, 0), (0, -1, 0, 0, 1)\right)$$

donc une base de $\mathrm{Ker}(f)$ est $\mathcal{B}' = \big((0, -1, 1, 0, 0), (0, -1, 0, 1, 0), (0, -1, 0, 0, 1)\big)$

2. $f(u) = f(e_2 + e_3 + e_4) = f(e_2) + f(e_3) + f(e_4) = 3 \cdot e_1 + 3 \cdot e_5$ et $f(v) = f(e_1) + f(e_5) = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_1 + e_5 = 2 \cdot e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + 2 \cdot e_5$.
3. $f(u - v) = f(u) - f(v) = e_1 - e_2 - e_3 - e_4 + e_5 = v - u$ et $f(u + 3v) = f(u) + 3 \cdot f(v) = 3 \cdot e_1 + 3 \cdot e_5 + 6 \cdot e_1 + 3 \cdot e_2 + 3 \cdot e_3 + 3 \cdot e_4 + 6 \cdot e_5 = 9e_1 + 3e_2 + 3e_3 + 3e_4 + 9e_5 = 3(u + 3v)$

4. Montrons que $(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$ est une famille libre. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ des réels tels que

$$\lambda_1 \cdot f_1 + \lambda_2 \cdot f_2 + \lambda_3 \cdot f_3 + \lambda_4 \cdot f_4 + \lambda_5 \cdot f_5 = 0_{\mathbb{R}^5}$$

Alors

$$\lambda_1(-e_2 + e_3) + \lambda_2(-e_2 + e_4) + \lambda_3(-e_2 + e_5) + \lambda_4(-e_1 + e_2 + e_3 + e_4 - e_5) + \lambda_5(3e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + 3e_5) = 0$$

donc

$$(3\lambda_5 - \lambda_4)e_1 + (-\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5)e_2 + (\lambda_1 + \lambda_4 + \lambda_5)e_3 + (\lambda_2 + \lambda_4 + \lambda_5)e_4 + (\lambda_3 - \lambda_4 + 3\lambda_5) = 0$$

Or la famille $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ est libre, on en déduit le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3\lambda_5 - \lambda_4 & = & 0 \\ -\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 & = & 0 \\ \lambda_1 + \lambda_4 + \lambda_5 & = & 0 \\ \lambda_2 + \lambda_4 + \lambda_5 & = & 0 \\ \lambda_3 - \lambda_4 + 3\lambda_5 & = & 0 \end{array}\right. \underset{L_5 \leftarrow L_5 - L_1}{\overset{L_4 \leftarrow L_4 - L_3}{\Longleftrightarrow}} \left\{\begin{array}{rcl} 3\lambda_5 - \lambda_4 & = & 0 \\ -\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 & = & 0 \\ \lambda_1 + \lambda_4 + \lambda_5 & = & 0 \\ \lambda_2 - \lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\overset{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3 + L_4}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcl} 3\lambda_5 - \lambda_4 & = & 0 \\ 3\lambda_4 + 3\lambda_5 & = & 0 \\ \lambda_1 + \lambda_4 + \lambda_5 & = & 0 \\ \lambda_2 - \lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

On déduit des deux premières lignes de ce système que $\lambda_4 = \lambda_5 = 0$, puis que $\lambda_1 = 0$ d'après L_3 et $\lambda_2 = 0$ d'après L_4, finalement l'unique solution est $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$ donc la famille $(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$ est libre. Comme $\mathbb{R}^5$ est de dimension 5, on en conclut que $(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$ est une base de $\mathbb{R}^5$.

5. On a $f(f_1) = f(f_2) = f(f_3) = 0$ car f_1, f_2 et f_3 sont des vecteurs de $\text{Ker}(f)$.

   De plus, d'après la question 2.b, $f(f_3) = -f_3$ et $f(f_4) = 3f_4$.

   On en conclut que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}''$ est

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

6. Soit P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}''$. Alors d'après le cours

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}}(f) = P\mathbf{M}_{\mathcal{B}''}(f)P^{-1}$$

   donc

$$C = PDP^{-1}$$

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$ car D est une matrice diagonale.

   De plus, pour $n = 1$ on a $C = PDP^{-1}$ d'après la question précédente et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $C^{n+1} = C^n \times C$ donc si $C^n = PD^nP^{-1}$ alors $C^{n+1} = PD^nP^{-1} \times PDP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$, donc par récurrence sur n on en déduit que $C^n = PD^nP^{-1}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

   Finalement

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad C^n = P \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \times P^{-1}$$

Execice 2

1. (a) On raisonne par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$.

 - **Initialisation :** Pour $k = 0$, on a $\dfrac{b^0}{0!} = 1$ donc on a bien $\mathbb{P}(X = 0) = \dfrac{b^0}{0!}\mathbb{P}(X = 0)$.
 - **Hérédité :** Supposons que $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{b^k}{k!}\mathbb{P}(X = 0)$ pour un certain rang $k \in \mathbb{N}$.

 Alors, $\mathbb{P}(X = k+1) = \dfrac{b}{k+1}\mathbb{P}(X = k)$ d'après la relation de Panjer, donc $\mathbb{P}(X = k+1) = \dfrac{b}{k+1}\dfrac{b^k}{k!} = \dfrac{b^{k+1}}{k+1}$ par hypothèse de récurrence.

 La propriété est donc héréditaire.
 - **Conclusion :** Par principe de récurrence on en conclut que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{b^k}{k!}\mathbb{P}(X = 0)$.

 (b) $\mathbb{P}(X = 0)$ est une constante, la série de terme général $\dfrac{b^k}{k!}$ est une série exponentielle, elle converge quelle que soit la valeur de b et $\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{b^k}{k!} = \mathrm{e}^b$.

 Ainsi, $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X = 0) \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{b^k}{k!} = \mathbb{P}(X = 0)\,\mathrm{e}^b$.

 Puisque X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, on a $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1$ donc $\mathbb{P}(X = 0)\,\mathrm{e}^b = 1$ d'où $\mathbb{P}(X = 0) = \mathrm{e}^{-b}$.

 (c) X suit une loi de Poisson de paramètre b donc X admet une espérance et une variance et $E(X) = V(X) = b$.

2. (a) Pour $k = 1$, $\mathbb{P}(X = 1) = (a - 2a)\mathbb{P}(X = 0) = -a\mathbb{P}(X = 0)$.

 Pour $k = 2$, $\mathbb{P}(X = 2) = \left(a - \dfrac{2a}{2}\right)\mathbb{P}(X = 1) = 0$.

 Par récurrence immédiate, on en déduit que pour tout $k \geq 2$, $\mathbb{P}(X = k) = 0$

 (b) Les valeurs prises par X sont 0 et 1 d'après la question précédente. On en déduit que X suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(X = 1)$.

 Puisque $\mathbb{P}(X = 1) = -a\mathbb{P}(X = 0)$ et que $\mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) = 1$, on en déduit que $\mathbb{P}(X = 0)(1 - a) = 1$ donc $\mathbb{P}(X = 0) = \dfrac{1}{1-a}$. (puisque $a < 0$ on a nécessairement $1 - a \neq 0$).

 Finalement, X suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{-a}{1-a}$.

 (c) Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre p, on a $E[X] = p$ et $V(X) = p(1-p)$ donc pour cette question

$$E[X] = \frac{-a}{1-a} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{-a}{1-a} \times \left(1 + \frac{a}{1-a}\right) = \frac{-a}{(1-a)^2}$$

3. (a) Soit $k \in [\![1, n]\!]$. $\mathbb{P}(Z = k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ d'une part, et d'autre part

$$\begin{aligned}\frac{p}{1-p} \times \frac{n-k+1}{k} \times \mathbb{P}(Z = k-1) &= \frac{p}{1-p} \times \frac{n-k+1}{k} \times \binom{n}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k+1} \\ &= \frac{n-k+1}{k} \times \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}p^{k-1+1}(1-p)^{n-k+1-1} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}\end{aligned}$$

donc on a bien $\mathbb{P}(Z=k) = \dfrac{p}{1-p} \times \dfrac{n-k+1}{k} \times \mathbb{P}(Z=k-1)$.

(b) Reformulons l'égalité précédente :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z=k) &= \frac{p}{1-p} \times \frac{n-k+1}{k} \times \mathbb{P}(Z=k-1) \\
&= \frac{p}{1-p} \times \left(\frac{n+1}{k} - 1\right) \times \mathbb{P}(Z=k-1) \\
&= \left(-\frac{p}{1-p} + \frac{p(n+1)}{(1-p)k}\right) \times \mathbb{P}(Z=k-1)
\end{aligned}$$

donc Z vérifie une relation de Panjer avec $a = -\dfrac{p}{1-p}$ et $b = \dfrac{p(n+1)}{1-p}$.

4. (a) $\mathbb{P}(X=1) = (a+b)\mathbb{P}(X=0)$. Puisque $\mathbb{P}(X=0) \geq 0$ et $\mathbb{P}(X=1) \geq 0$ il faut nécessairement que $a+b \geq 0$.

(b) Soit $m \geq 0$ un entier.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m+1} k\mathbb{P}(X=k) &= \sum_{k=1}^{m+1} k\left(a + \frac{b}{k}\right)\mathbb{P}(X=k-1) \\
&= a\sum_{k=1}^{m+1} k\mathbb{P}(X=k-1) + b\sum_{k=1}^{m+1}\mathbb{P}(X=k-1) \\
&= a\sum_{k'=0}^{m}(k'+1)\mathbb{P}(X=k') + b\sum_{k'=0}^{m}\mathbb{P}(X=k') && \text{en posant } k'=k-1
\end{aligned}$$

d'où l'égalité voulue.

(c) D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m+1} k\mathbb{P}(X=k) =& a\sum_{k=0}^{m}(k+1)\mathbb{P}(X=k) + b\sum_{k=0}^{m}\mathbb{P}(X=k) \\
\sum_{k=1}^{m+1} k\mathbb{P}(X=k) =& a\sum_{k=1}^{m}k\mathbb{P}(X=k) + (a+b)\sum_{k=0}^{m}\mathbb{P}(X=k) \\
(1-a)\sum_{k=1}^{m} k\mathbb{P}(X=k) =& -(m+1)\mathbb{P}(X=m+1) + (a+b)\sum_{k=0}^{m}\mathbb{P}(X=k) \\
\leq& (a+b)\sum_{k=0}^{m}\mathbb{P}(X=k) && \text{car } -(m+1)\mathbb{P}(X=m+1) \leq 0 \text{ et } a+b \geq 0
\end{aligned}$$

Or $\sum \mathbb{P}(X=k)$ converge car X est une variable aléatoire, donc $\left(\sum_{k=0}^{m}\mathbb{P}(X=k)\right)_{m\geq 1}$ est majorée (par 1).

On en conclut que $\left((1-a)\sum_{k=1}^{m} k\mathbb{P}(X=k)\right)_{m\geq 1}$ est majorée.

Par hypothèse $(1-a) > 0$. Une série à termes positifs dont les sommes partiels sont majorées est convergente donc X admet une espérance. On en conclut en particulier que $m\mathbb{P}(X=m) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$ car la série $\sum k\mathbb{P}(X=k)$ converge.

Ainsi, en reprenant le calcul précédent à la 3e ligne et en passant à la limite on obtient

$$(1-a)\sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X=k) = (a+b)\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k) = a+b$$

Puisque $1-a \neq 0$ on en conclut finalement que $E[X] = \sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X=k) = \dfrac{a+b}{1-a}$.

(d) On suit l'indication de l'énoncé. Soit $m \geq 0$ un entier.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m+1} k^2 \mathbb{P}(X = k) &= \sum_{k=1}^{m+1} k^2 \left(a + \frac{b}{k}\right) \mathbb{P}(X = k-1) \\
&= a \sum_{k=1}^{m+1} k^2 \mathbb{P}(X = k-1) + b \sum_{k=1}^{m+1} k\mathbb{P}(X = k-1) \\
&= a \sum_{k=0}^{m} (k+1)^2 \mathbb{P}(X = k) + b \sum_{k=0}^{m} (k+1)\mathbb{P}(X = k)
\end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m+1} k^2 \mathbb{P}(X = k) &= a \sum_{k=1}^{m} k^2 \mathbb{P}(X = k) + 2a \sum_{k=0}^{m} k\mathbb{P}(X = k) + a \sum_{k=0}^{m} \mathbb{P}(X = k) + b \sum_{k=0}^{m} (k+1)\mathbb{P}(X = k) \\
&= a \sum_{k=1}^{m} k^2 \mathbb{P}(X = k) + (2a+b) \sum_{k=0}^{m} k\mathbb{P}(X = k) + (a+b) \sum_{k=0}^{m} \mathbb{P}(X = k)
\end{aligned}$$

en faisant $-(m+1)^2\mathbb{P}(X = m)$ de chaque côté et en soustrayant $a \sum_{k=1}^{m} k^2 \mathbb{P}(X = k)$, on obtient

$$\begin{aligned}
(1-a) \sum_{k=1}^{m} k^2 \mathbb{P}(X = k) &= -(m+1)^2 \mathbb{P}(X = m+1) + (2a+b) \sum_{k=0}^{m} k\mathbb{P}(X = k) + (a+b) \sum_{k=0}^{m} \mathbb{P}(X = k) \\
&\leq (2a+b) \sum_{k=0}^{m} k\mathbb{P}(X = k) + (a+b) \sum_{k=0}^{m} \mathbb{P}(X = k) \qquad \text{car } -(m+1)^2\mathbb{P}(X
\end{aligned}$$

Les séries $\sum \mathbb{P}(X = k)$ et $\sum k\mathbb{P}(X = k)$ convergent car X est une variable aléatoire et X admet une variance d'après la question précédente, donc $\left((2a+b) \sum_{k=0}^{m} k\mathbb{P}(X = k)\right)_{m\geq 0}$ et $\left((a+b) \sum_{k=0}^{m} \mathbb{P}(X = k)\right)_{m\geq 0}$ admettent une limite lorsque $m \to +\infty$ donc sont majorées. Ainsi, $\left((1-a) \sum_{k=1}^{m} k^2 \mathbb{P}(X = k)\right)_{m\geq 0}$ est majorée, donc $\sum k^2 \mathbb{P}(X = k)$ converge car $1 - a > 0$.

Ainsi, X admet un moment d'ordre 2 donc $\lim\limits_{m\to+\infty} (m+1)^2\mathbb{P}(X = m+1) = 0$ car c'est le terme général de la série convergente $\sum k^2 \mathbb{P}(X = k)$.

Ainsi, en passant à la limite dans le calcul précédent, on obtient

$$\begin{aligned}
(1-a) \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \mathbb{P}(X = k) &= (2a+b) \sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k) + (a+b) \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) \\
&= (2a+b) \times \frac{a+b}{1-a} + a + b \\
&= \frac{(a+b)(2a+b+1-a)}{1-a} \\
&= \frac{(a+b)(a+b+1}{1-a}
\end{aligned}$$

d'où

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \mathbb{P}(X = k) = \frac{(a+b)(a+b+1)}{(1-a)^2}$$

(e) d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$V(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{(a+b)(a+b+1)}{(1-a)^2} - \frac{(a+b)^2}{(1-a)^2} = \frac{a+b}{(1-a)^2}$$